

Application de l'analyse multifractale à l'estimation des crues extrêmes en Tunisie

CHEBCHOUB ASSIA

Institut National des Sciences Appliquées et de Technologie, Département de Mathématiques et Informatique, BP 679, 1080 Tunis Cedex, Tunisie

assia.chebchoub@insat.rnu.tn

BARGAOUI ZOUBEIDA

Ecole Nationale d'Ingénieurs de Tunis, Laboratoire de Modélisation en Hydraulique et Environnement, BP 37, Le Belvédère, 1002 Tunis, Tunisie

Résumé Un modèle multifractal, justifié par l'expression des débits comme des intégrales de convolution entre la pluie et l'hydrogramme unitaire du bassin versant, est développé et est appliqué à la série des débits maximaux annuels de crue en Tunisie. Les propriétés d'invariance d'échelle de la série ont été caractérisées par la fonction universelle des moments $K(h)$ du modèle Log-Levy dont les paramètres sont identifiés.

Mots clés débits maximaux annuels de crue; bassin versant; multifractal; cascade aléatoire; générateur Log-Levy

Keys words annual peak flows; drainage basin; multifractal; random cascade; Log-Levy generator

INTRODUCTION

La variabilité spatio-temporelle des variables géophysiques pluie et débit a été modélisée dans le cadre de la théorie fractale (Mandelbrot, 1975) et multifractale (Lovejoy & Schertzer, 1990). La pratique hydrologique justifie de considérer la superficie comme facteur d'échelle pour les débits maximaux annuels de crue. La formulation du débit maximal de crue en un point d'un bassin versant par une intégrale de convolution (Eagleson, 1967) en permet une représentation spectrale. Les allures des spectres obtenus pour différents modèles de variabilité spatiale de la pluie et différentes formes de fonctions de transfert du bassin autorisent d'envisager ces débits, exprimés en fonction de leur localisation spatiale, comme multifractals. Nous supposons que les distributions des débits sont indépendantes de la localisation géographique et qu'elles ne dépendent que de la surface de collecte des eaux. Il n'y a pas eu, à notre connaissance, de quantification du caractère d'échelle des débits maximaux annuel de crue relativement à la surface, par une telle approche. Celle-ci est appliquée à 55 stations du réseau hydrométrique tunisien avec des séries d'observations variant de 7 à 92 ans et des superficies allant de 2.16 km² à 20 995 km² (le plus grand bassin jaugé de la Tunisie). Nous rappelons les techniques d'analyse multifractale d'un champ pour le modèle universel Log-Levy qui sera appliqué à notre série de débits maximaux annuels de crue. Les paramètres de ce modèle sont identifiés et les moments et singularités caractéristiques seront estimés.

APPROCHE MULTIFRACTALE – MODELE LOG-LEVY

La variabilité d'un champ pluvio-hydrométrique est assimilée à celle produite par des cascades aléatoires. Un champ géophysique multifractal R_λ à une échelle λ , $\lambda < 1$ (λ est le rapport entre l'échelle d'observation et l'échelle externe suffisamment grande), défini sur un espace de dimension ID , obéit à (Schertzer & Lovejoy, 1987; Gupta & Waymire, 1993):

- la loi l'invariance d'échelle de sa distribution de probabilité

$$P(R_\lambda \geq \lambda^{-\gamma}) = A_\lambda \lambda^{c(\gamma)} \quad (1)$$

- la loi d'invariance multiple des moments statistiques d'ordre h , $h \geq 0$

$$E(R_\lambda^h) = B_\lambda \lambda^{-K(h)} \quad (2)$$

où A_λ et B_λ sont des préfacteurs variant peu avec λ . Il faut noter que dans la plupart des travaux, l'échelle λ est le rapport entre la plus grande et la plus petite échelle et les signes des puissances dans (1) et (2) sont inter-changés. La fonction codimension $c(\gamma)$ qui caractérise les singularités d'ordre γ est liée à la fonction des moments $K(h)$ par une transformation de Legendre qui mène à:

$$h = c'(\gamma); \quad \gamma = K'(h) \quad (3)$$

Choix du modèle

Pour son universalité, le modèle Log-Levy est choisi. Les fonctions $K(h)$ et $c(\gamma)$ sont, pour $h > 0$ et $0 \leq \alpha \leq 2$, définies par:

$$K(h) + hH = \begin{cases} \frac{C_1}{\alpha - 1} (h^\alpha - h) & \alpha \neq 1 \\ C_1 h \log h & \alpha = 1 \end{cases} \quad (4)$$

$$c(\gamma - H) = \begin{cases} C_1 \left(\frac{\gamma}{C_1 \alpha'} + \frac{1}{\alpha} \right)^\alpha & \alpha \neq 1 \\ C_1 \exp \left(\frac{\gamma}{C_1} - 1 \right) & \alpha = 1 \end{cases} \quad \text{avec} \quad \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha'} = 1 \quad (5)$$

C'est un modèle à trois paramètres: H décrit la déviation moyenne d'une conservation de flux, $H = 0$ pour un champ conservatif; C_1 décrit l'inhomogénéité moyenne et correspond à la codimension des singularités moyennes $C_1 = c(C_1 - H)$; et α (index de Levy) décrit le degré de multifractalité, $\alpha = 2$ correspond au modèle log-normal.

Moments et singularités caractéristiques

La fonction $K(h)$ permet de déterminer une valeur critique de h , $h = h_D$, telle que les moments statistiques divergent dès que $h > h_D$. Le moment où intervient cette divergence est donné par (Tessier *et al.*, 1993):

$$K(h_D) = (h_D - 1)ID, \quad h_D > 1 \quad (6)$$

A ce moment h_D correspond, à partir de la relation (3), la singularité $\gamma_D = K'(h_D)$. Notons γ_s la plus importante singularité accessible, il lui correspond h_s l'ordre maximum des moments statistiques que nous serons capable d'estimer. Les singularités γ sont bornées par γ_{max} qui vérifie (Schertzer & Lovejoy, 1992):

$$c(\gamma_{max}) = ID \tag{7}$$

La singularité maximale observable est $\gamma_s = \gamma_{max}$ dans le cas de processus conservatifs. Pour un processus non conservatif, la singularité maximale observable γ_s pour le modèle Log-Levy est:

$$\gamma_s = \gamma_{max} + H \tag{8}$$

et dans le cas unidimensionnel, les relations (7) et (8) conduisent à $C(\gamma_s - H) = 1$ qui se traduit, pour le modèle Log-Levy, par:

$$\gamma_s - H = \alpha' C_1^{1/\alpha} - (\alpha - 1)^{-1} C_1 \tag{9}$$

Le moment maximal calculable h_s vérifie alors $h_s = c'(\gamma_s)$. Lorsque $\min(h_s, h_D)$ est atteint, $K(h)$ mesurée ne suit plus la forme théorique donnée par l'universalité et devient linéaire. Les moments calculables s'en trouvent limités.

APPLICATION AUX DEBITS MAXIMAUX ANNUELS EN TUNISIE

Les propriétés d'invariance d'échelle de la série des débits maximaux annuels de crue vont être caractérisées par les fonctions universelles $K(h)$ et $c(\gamma)$ du modèle Log-Levy. L'échelle λ est calculée en rapportant la superficie S_i de chaque bassin versant des 55 stations considérées à une superficie de référence $S_0 \gg S_i$, S_0 a été prise arbitrairement égale à 10^6 km^2 .

Estimation des paramètres du modèle, des moments et singularités caractéristiques

En premier, nous estimons le paramètre H de la fonction $K(h)$. Celle ci correspond, d'après (2), à la pente de chaque droite de régression de $\log(E(R_\lambda^h))$ en fonction de $\log(\lambda)$ et est estimée à partir des moments d'ordre h ($h > 0$) des débits maximaux annuels de crue. La Fig. 1 illustre l'invariance d'échelle et les différentes droites de régression sont représentées. Le Tableau 1 donne les valeurs obtenues pour $K(h)$ en

Tableau 1 $K(h)$ en fonction de h .

h	$K(h)$	h	$K(h)$	h	$K(h)$	h	$K(h)$
0.25	0.104	1	0.414	1.75	0.741	3	1.367
0.5	0.207	1.25	0.517	2	0.869	3.5	1.621
0.75	0.306	1.5	0.635	2.5	1.115	4	1.878

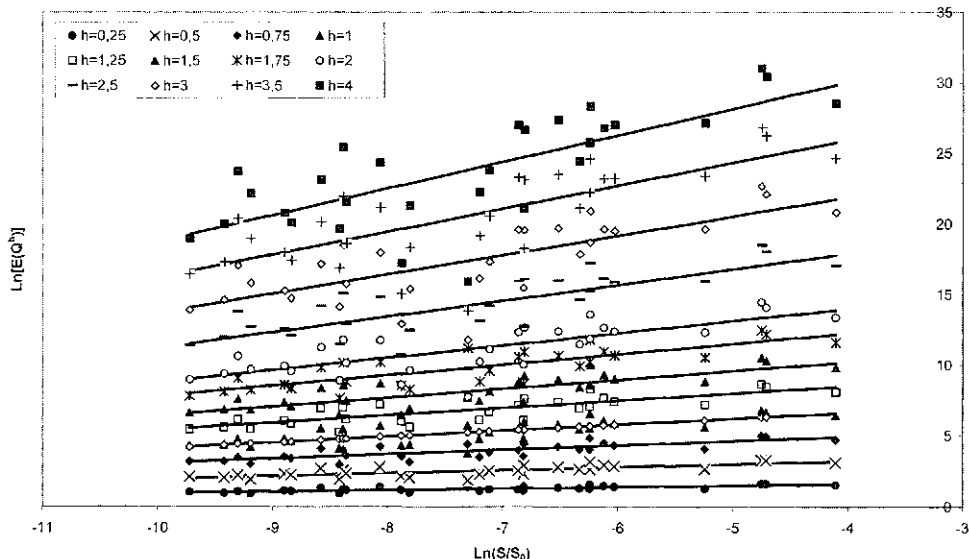


Fig. 1 Invariance d'échelle et droites de régression pour les débits maximaux annuels. Le nuage de points montrant les moments pour différents ordre en fonction de la jauge est log-log linéaire.

fonction de h . Le champ étudié est non conservatif: $H = K(1) = 0.414$. Pour le rendre conservatif, nous avons introduit un champ ϕ conservatif relié au champ R_λ par (le signe \approx désigne une égalité asymptotique):

$$R_\lambda \approx \phi^\beta \lambda^{-\beta} \tag{10}$$

Les relations (2) et (10) impliquent:

$$E[(\phi^\beta)^h] \approx \lambda^{\beta h} \lambda^{-K(h)} \tag{11}$$

En posant $h' = \beta h$, la relation (11) devient $E(\phi^{h'}) \approx \lambda^{h'} \lambda^{-K(h'/\beta)} \approx \lambda^{-1-h'+K(h'/\beta)}$. La fonction structure $K_\phi(h)$ du champ conservatif ϕ associé au champ R_λ est $K_\phi(h) = -h + K(h/\beta)$. Le choix de β est fixé en considérant la contrainte $K_\phi(1) = 0$, il vient que β est solution de $K(1/\beta) = 1$; $1/\beta$ est estimé directement à partir des pentes obtenues précédemment (Tableau 1) et la valeur retenue est $\beta = 0.44$. La Fig. 2 représente la fonction $K_\phi(h)$, le nuage de points vérifie bien $K_\phi(0) = K_\phi(1) = 0$. L'estimation des paramètres α et C_1 est effectuée en cherchant les valeurs qui ajustent le mieux le nuage de points à la fonction $K_\phi(h)$ théorique du modèle Log-Levy (éq. (4) dans laquelle $H = 0$). La Fig. 2 montre que l'ajustement peut être jugé satisfaisant pour $\alpha = 1.77$ et $C_1 = 0.1$ alors que le modèle Log-normal ($\alpha = 2$, $C_1 = 0.1$) s'ajuste légèrement moins bien. La relation (6) a permis d'estimer le moment de divergence à $h_D = 2.2$ par interpolation graphique (Fig. 3). La singularité $\gamma_D = K'(h_D)$ correspondante vaut $\gamma_D = 0.73$. En résolvant l'équation (9), nous obtenons une estimation de la singularité $\gamma_s = 0.94$. Le moment maximal calculable

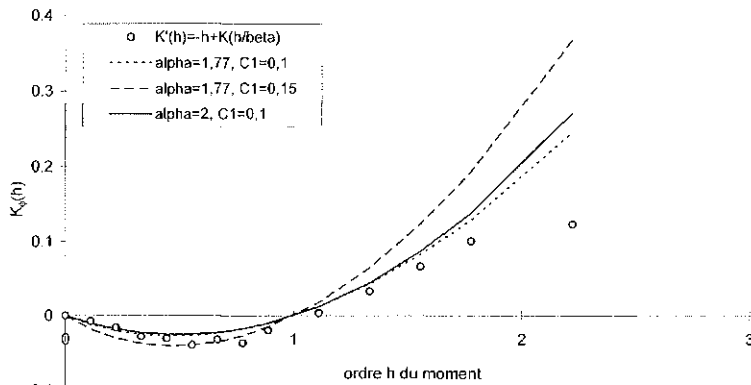


Fig. 2 Fonction structure $K_\phi(h)$ du champ conservatif ϕ associé au champ R_λ . On compare des modèles théoriques pour différents jeux de paramètres (α , C_1) à la fonction $K_\phi(h)$ obtenue d'après les historiques.

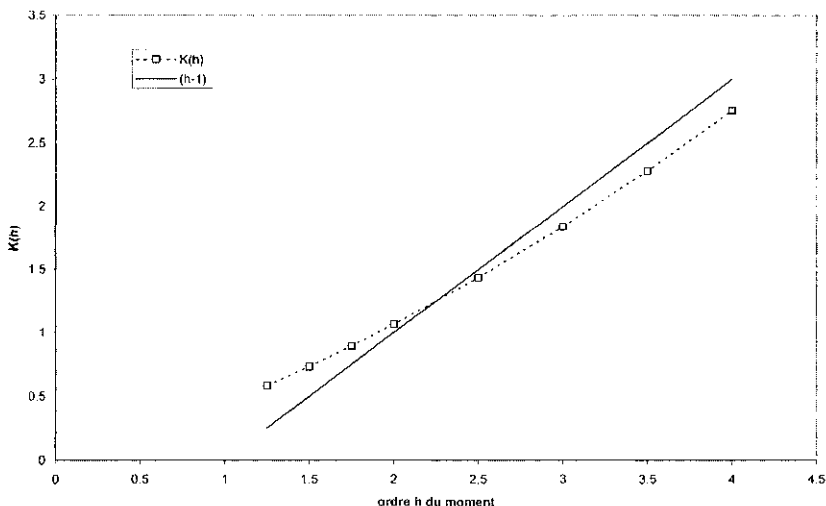


Fig. 3 Estimation de H_D par interpolation graphique (intersection entre la fonction $K(h)$ et la droite $h - 1$) on obtient une estimation de $h_D = 2.2$.

Tableau 2 Estimation des paramètres du modèle et des moments et singularités caractéristiques.

	H	C_1	α	h_D	H_s	γ_D	$\gamma_s - H$
Présente étude	0.414	0.1	1.77	2.2	3.68	0.73	0.53
Tessier <i>et al.</i> (1996)	BF: -0.05 ± 0.2 HF: 0.4 ± 0.3	0.2 ± 0.1	1.45 ± 0.02	BF: 3.2 ± 0.7 HF: 2.7 ± 1	BF: 4.2 ± 0.5 HF: 5.3 ± 0.5	-	-
Pandey <i>et al.</i> (1998)	-0.33 ± 0.14	0.12 ± 0.03	1.7 ± 0.11	3.37 ± 0.86	3.67 ± 0.8	-	0.33 ± 0.2

$h_s = c'(\gamma_s)$ est estimé à $h_s = 3.68$. Le Tableau 2 résume les estimations des paramètres H , C_1 et α ; et des moments et singularités caractéristiques et les compare à ceux de la littérature (Pandey *et al.*, 1998, et Tessier *et al.*, 1996) pour les débits moyens journaliers analysés avec une jauge temporelle. Ces derniers ont mis en évidence deux

comportements: basse ou haute fréquence. Comme le débit maximal annuel est un débit instantané, on se trouve bien en haute fréquence et nos estimations y sont comparables.

CONCLUSION

La démarche adoptée pour l'analyse du comportement multifractal des débits maximaux de crue en référence aux surfaces de drainage est celle de considérer la superficie comme une jauge d'agrégation de la chronologie de la variable "débit maximal annuel". La formalisation de la relation entre débits et surfaces des bassins versants placée dans le cadre de la théorie multifractale nous a permis l'estimation des paramètres des fonctions universelles des moments $K(h)$ et de codimension $c(\gamma)$ du modèle Log-Levy. Le processus étudié n'est pas conservatif, avec un index de Levy égal à 1.77 et une inhomogénéité moyenne de 0.1. Les moments et singularités caractéristiques obtenues se comparent à ceux estimés dans la littérature, pour des débits moyens journaliers analysés avec une jauge temporelle.

BIBLIOGRAPHIE

- Eagleson, P. S. (1967) Optimum density of rainfall networks. *Water Resour. Res.* **3**(4), 1021-1034.
- Gupta, V. K. & Waymire, E. C. (1993) A statistical analysis of mesoscale rainfall as a random cascade. *J. Appl. Met.* **32**, 251-267.
- Lovejoy, S. & Schertzer, D. (1990) Multifractals, universality classes and satellite and radar measurements of cloud and rain fields. *J. Geophys. Res.* **95**, 2021-2034.
- Mandelbrot, B. (1975) *Les Objets Fractals, Forme, Hasard et Dimension*, Flammarion, Paris, France.
- Pandey, G., Lovejoy, S. & Schertzer, D. (1998) Multifractal analysis of daily river including extremes for basins of five to two million square kilometres, one day to 75 years. *J. Hydrol.* **208**, 62-81.
- Schertzer, D. & Lovejoy, S. (1987) Physical modeling and analysis of rain and clouds by anisotropic scaling of multiplicative processes. *J. Geophys. Res.* **92**, 9693-9714.
- Schertzer, D. & Lovejoy, S. (1992) Multifractals et géophysique. Quelques aspects fondamentaux. Dans *Introduction aux Fractals et Multifractals*, un cahier du groupe d'analyse de la variabilité non linéaire en géophysique, 31-43.
- Tessier, Y., Lovejoy, S. & Schertzer, D. (1993) Universal multifractals: theory and observations for rain and clouds. *J. Appl. Met.* **32**(2), 223-250.
- Tessier, Y., Lovejoy, S., Hubert, P. & Schertzer, D. (1996) Multifractal analysis and modeling of rainfall and river flows and scaling, causal transfer functions. *J. Geophys. Res.* **101**, 26427-26440.