

Effet de la variabilité du régime hydrologique du Fleuve Sénégal sur la prévision des crues: application du filtre de Kalman

SOUSSOU SAMBOU

Département de Physique, Faculté des Sciences, Université Cheikh Anta Diop, BP 5005, Dakar, Sénégal

e-mail: sousamb@ucad.refer.sn

CLAUDE THIRRIOT

ENSEEIH, 2 Rue Charles Camichel, F-31071 Toulouse Cedex, France

Résumé Le régime hydrologique du Fleuve Sénégal en amont de Bakel se caractérise par une irrégularité interannuelle des crues, et une variabilité à long terme, qui proviennent de la variabilité du régime pluviométrique. Les essais de simulation de la prévision des crues à l'aide d'un modèle de régression linéaire sur une longue période sont affectés par l'irrégularité des crues. L'introduction du filtre de Kalman met en évidence l'effet de la variabilité à long terme du régime d'écoulement. Il permet d'améliorer les résultats des essais de simulations de prévision des crues de façon sensible à partir de 1944.

INTRODUCTION

Le bassin du Fleuve Sénégal en amont de Bakel (Fig. 1), d'une superficie de 218 000 km² se caractérise par un relief très accidenté au sud, qui s'adoucit ensuite jusqu'à Bakel. De tropical de transition en amont de Dakka-Saïdou, le climat devient, allant vers le nord, tropical pur, puis sahélien à partir de Bakel. Cette configuration climatique s'accompagne d'un régime hydrologique tropical assez pur, avec une période de hautes eaux allant de juillet à octobre, suivie d'une période de basses eaux qui débute en décembre et se poursuit jusqu'au mois de Juin de l'année suivante. Ce régime d'écoulement est fortement tributaire du régime pluviométrique, ce qui se traduit, d'une année à l'autre, par une irrégularité des crues, et sur une longue période, par une variabilité, mise en évidence, à partir des séries des modules, par des tests appropriés (Paturel *et al.*, 1997). Cette particularité du régime du cours d'eau joue un rôle non négligeable sur les performances des modèles de prévision des crues.

Dans ce travail, nous utilisons, sur une longue période d'observation, un modèle de régression linéaire, que nous avons ensuite combiné au filtre de Kalman. Les résultats obtenus ont montré que la variabilité du régime d'écoulement affecte les valeurs des critères de qualité choisis, et que le filtre de Kalman apporte une amélioration significative à partir de 1944.

METHODOLOGIE

Modèle de base

Un modèle de régression linéaire, décrivant l'évolution du débit à Bakel à partir des débits aux stations explicatives situées en amont a été écrit sous la forme générale ci-dessous:

$$Q_v(t + \delta) = \sum_{i=1}^k \sum_{j=0}^{l_i} \alpha_{ij} Q_i(t - j, d) + \eta(t) \quad (1)$$

avec k nombre de stations explicatives situées en amont; l_i ordre de la station explicative i située en amont; $Q_v(t + \delta)$ débit à l'exutoire à la date $t + \delta$; $Q_i(t - j, d)$ débit à la station i située en amont à la date $t - j, d$, d le pas de calcul; δ délai de prévision; α_{ij} les coefficients du modèle; $\eta(t)$ bruit du modèle supposé, blanc et gaussien.

Identification du modèle

Le réseau de prévision de base est constitué de la station de Bakel comme exutoire, et des stations explicatives, Dibia sur le Bafing, Oualia sur le Bakoye et Fadougou sur la Falémé, toutes situées en amont. Nous avons d'abord recherché le réseau optimal de prévision, en posant, dans la relation (1), $l_i = 0$. Le modèle devient alors:

$$Q_v(t + \delta) = \sum_{i=1}^k \alpha_{i0} Q_i(t) + \eta(t) \quad (2)$$

Les coefficients α_{i0} sont calculés en minimisant l'écart quadratique résiduel relatif normé par le rayon de giration de la série, soit ε^2 (Thirriot, 1992) défini ci-dessous:

$$\varepsilon^2 = \frac{E(\eta(t))^2}{k_Q^2} \quad (3)$$

avec $k_Q^2 = E(Q_v(t + \delta)^2)$ où k_Q est le rayon de giration de la série, supposée suffisamment longue pour que l'on puisse la considérer comme stationnaire. Ils s'écrivent aisément à l'aide des indices de coordination croisés $C_{ij}(\square)$ entre deux stations i et j avec un décalage égal à \square définis par:

$$C_{ij}(\tau) = \frac{E(Q_i Q_{j+\tau})}{\sqrt{E(Q_i^2) E(Q_{j+\tau}^2)}} \quad (4)$$

En introduisant dans (3) $\eta(t)$ tiré de (2), et en développant, ε^2 s'exprime uniquement en fonction des $C_{ij}(\square)$ calculés selon l'équation (4). Suivant les valeurs de k , nous trouvons:

- prévision à partir d'une station amont ($k = 1$):

$$\varepsilon^2(\delta) = 1 - C_{1v}^2(\delta) \quad (5)$$

- prévision à partir de deux stations amont ($k = 2$):

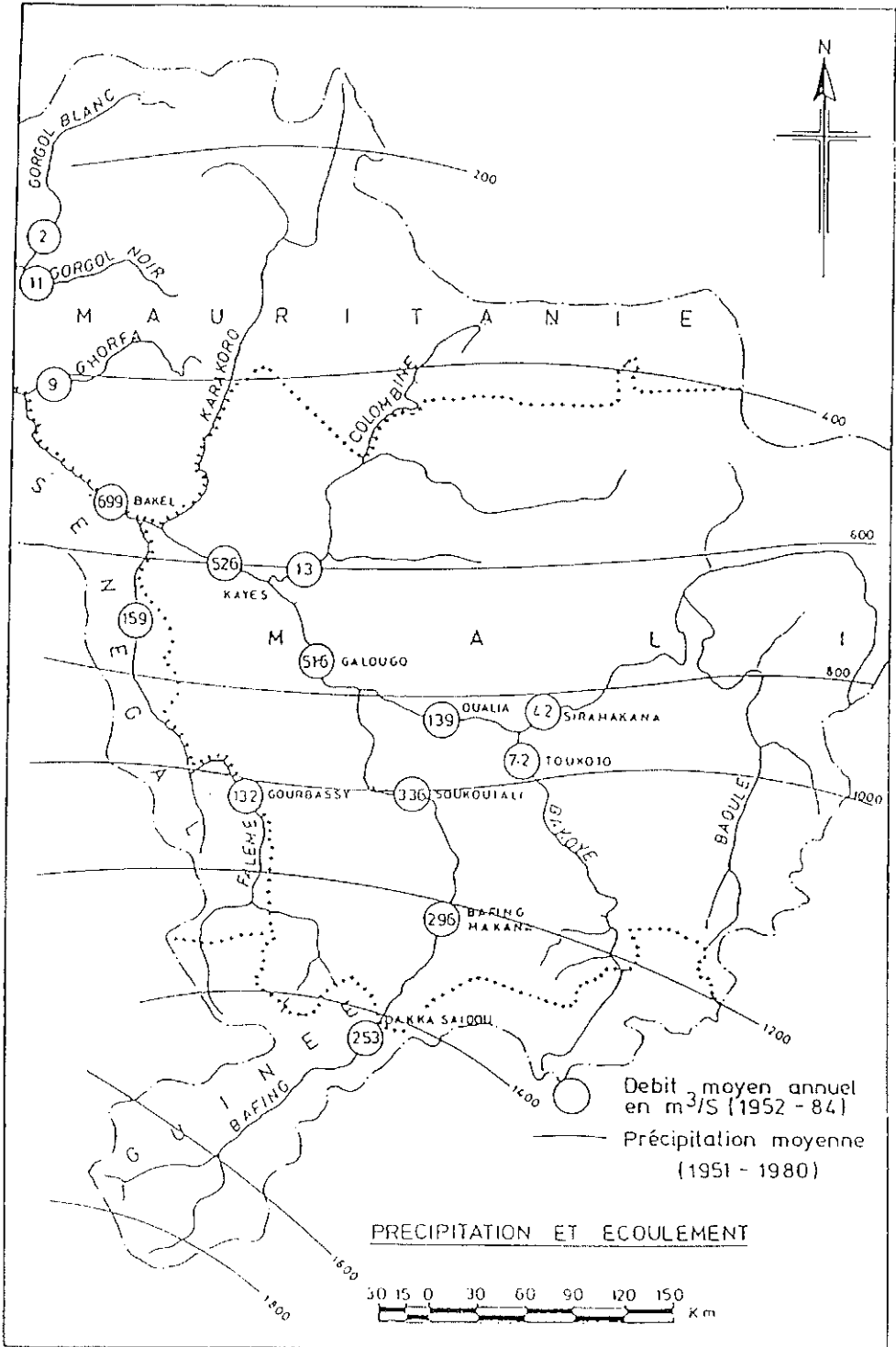


Fig. 1 Carte du haut-bassin du Fleuve Sénégal.

$$\varepsilon^2(\delta) = \frac{1 - C_{1v}^2(\delta) - C_{2v}^2(\delta) - C_{12}^2(0) + 2C_{1v}(\delta)C_{2v}(\delta)C_{12}(0)}{1 - C_{12}^2(0)} \quad (6)$$

– prévision à partir de trois stations amont ($k = 3$):

$$\varepsilon^2(\delta) = \frac{N}{D} \quad (7)$$

avec:

$$\begin{aligned} N = & 1 - C_{12}^2 - C_{13}^2 - C_{23}^2 - C_{1v}^2 - C_{2v}^2 - C_{3v}^2 + C_{13}^2 C_{2v}^2 + C_{12}^2 C_{3v}^2 + C_{23}^2 C_{1v}^2 \\ & + 2C_{12} C_{13} C_{23} + 2C_{12} C_{1v} C_{2v} + 2C_{13} C_{1v} C_{3v} + 2C_{23} C_{2v} C_{3v} \\ & - 2C_{13} C_{23} C_{1v} C_{2v} - 2C_{12} C_{23} C_{1v} C_{3v} - 2C_{12} C_{13} C_{2v} C_{3v} \end{aligned}$$

$$D = 1 - C_{12}^2 - C_{13}^2 - C_{23}^2 + 2C_{12} C_{13} C_{23}$$

où $C_{ij} = C_{ij}(0)$ est l'indice de coordination croisé entre la station i située en amont et la station j située en aval et $C_{iv} = C_{iv}(\delta)$ est l'indice de coordination croisé entre la station i située en amont et l'exutoire (Bakel) v .

Pour identifier le modèle, nous avons étudié l'évolution de ε^2 avec δ en utilisant d'abord une seule station explicative en amont (Fadougou, Oualia, ou Dibia) à l'aide de la relation (5), puis deux (Fadougou-Dibia; Fadougou-Oualia; Oualia-Dibia) par la

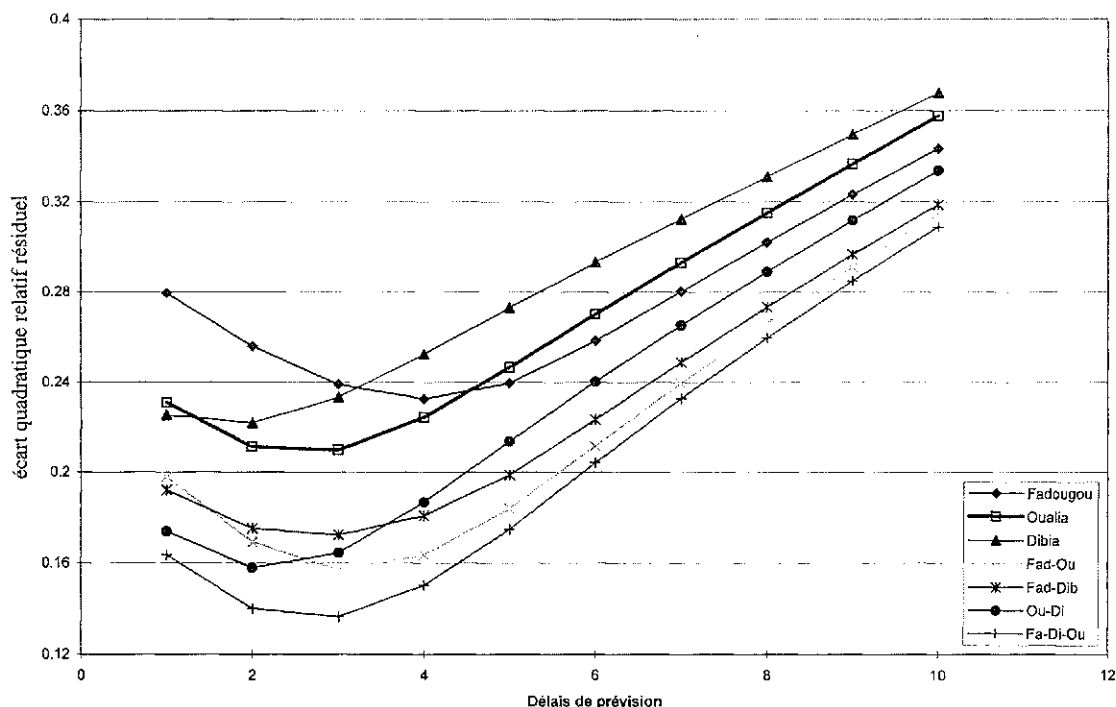


Fig. 2 Identification du modèle de régression linéaire à l'aide des indices de coordination.

relation (6); puis les trois ensemble dans le dernier essai avec la relation (7). Les différents résultats ont été résumés dans la Fig. 2. La combinaison optimale est obtenue par l'utilisation simultanée des trois stations avec un délai de prévision égal à $\delta = 3$ jours.

Validation du modèle

Pour valider le modèle, nous avons retenu un critère de qualité statistique global: l'écart quadratique moyen des erreurs de prévision.

Les simulations des prévisions ont ensuite été réalisées en prenant les coefficients calés sur la crue précédente. L'analyse des résultats obtenus montre une variation interannuelle de l'écart quadratique moyen des écarts de prévision, que l'on peut généraliser en recalculant les coefficients à chaque fois qu'une nouvelle information est disponible en temps réel, soit à l'aide de la méthode des moindres carrés récursive (Sambou & Thirriot, 1993) soit à l'aide du filtre de Kalman.

Régression linéaire et filtre de Kalman

Dans le cadre de cette application, le filtre de Kalman a été formulé sous la forme d'un filtre estimateur (Borne *et al.*, 1990). L'état du système est constitué par le vecteur θ des coefficients du modèle, la mesure étant obtenue par l'équation de régression linéaire utilisant l'état du système.

La première étape est celle de prédiction, qui permet d'estimer l'état à l'instant $t + 1$ à partir de l'état à l'instant t , ainsi que l'écart quadratique moyen de l'erreur d'estimation $P_{t+1/t}$

$$\hat{\theta}_{t+1/t} = \hat{\theta}_{t/t} \tag{8}$$

$$P_{t+1/t} = P_{t/t} \tag{9}$$

A l'instant $t + 1$, une mesure est faite sur le système, qui est utilisée pour réactualiser le vecteur des coefficients ainsi que la covariance de l'erreur.

$$\hat{\theta}_{t+1/t+1} = \hat{\theta}_{t+1/t} + K_{t+1} (Y_{t+1} - \hat{\theta}_{t+1/t} X_t) \tag{10}$$

$$P_{t+1/t+1} = P_{t+1/t} - \frac{P_{t+1/t} X_t X_t^T P_{t+1/t}}{1 + P_{t+1/t} X_t P_{t+1/t}^T} \tag{11}$$

où K_{t+1} représente le gain de l'innovation qui s'exprime par:

$$K_{t+1} = P_{t+1/t} X_t \tag{12}$$

Dans l'application qui a été faite, nous avons écrit le modèle de prévision sous la forme:

$$\hat{Y}_{t+1/t} = \hat{\theta}_{t+1/t} X_t \tag{13}$$

avec $\hat{\theta}_{t+1/t} = [\alpha_{10} \quad \alpha_{20} \quad \alpha_{30}]$ vecteur des coefficients du modèle représentant l'état

du bassin, $X_t = [Q_O(t) \quad Q_F(t) \quad Q_D(t)]^T$ vecteur représentant les débits aux stations explicatrices de Oualia, Fadougou, et Dibia toutes situées en amont de Bakel, à l'instant t et $Y_{t+\delta} = Q_B(t+\delta)$ débit à prévoir à la station de Bakel à l'instant $t+\delta$.

Pour démarrer les calculs, nous avons pris après quelques essais, les conditions initiales ci-dessous, $P_{0/0} = 10$ et $\hat{\theta}_{0/0} = [0 \quad 0 \quad 0]$.

RESULTATS

Nous avons choisi deux périodes de 10 années chacune, correspondant à des régimes hydrologiques différents: 1925-1934 (période excédentaire) et 1970-1979 période déficitaire. Nous avons ensuite représenté l'évolution journalière du coefficient $\alpha_{10}(t)$ aussi bien pour la période déficitaire que pour la période excédentaire 1925-1934 (Fig. 3). L'analyse de cette figure montre que:

- il s'écoule une certaine durée pour que le filtre soit "stable", et que cette période correspond au début de la première crue. Il apparaît ensuite des paliers distincts,
- l'instabilité des coefficients est beaucoup importante pour la période 1970-1979,
- bien que partant de conditions identiques, les coefficients tendent vers des valeurs limites différentes pour les deux périodes,
- les coefficients sont généralement plus élevés pour la période excédentaire (1925-1934) que pour la période sèche.

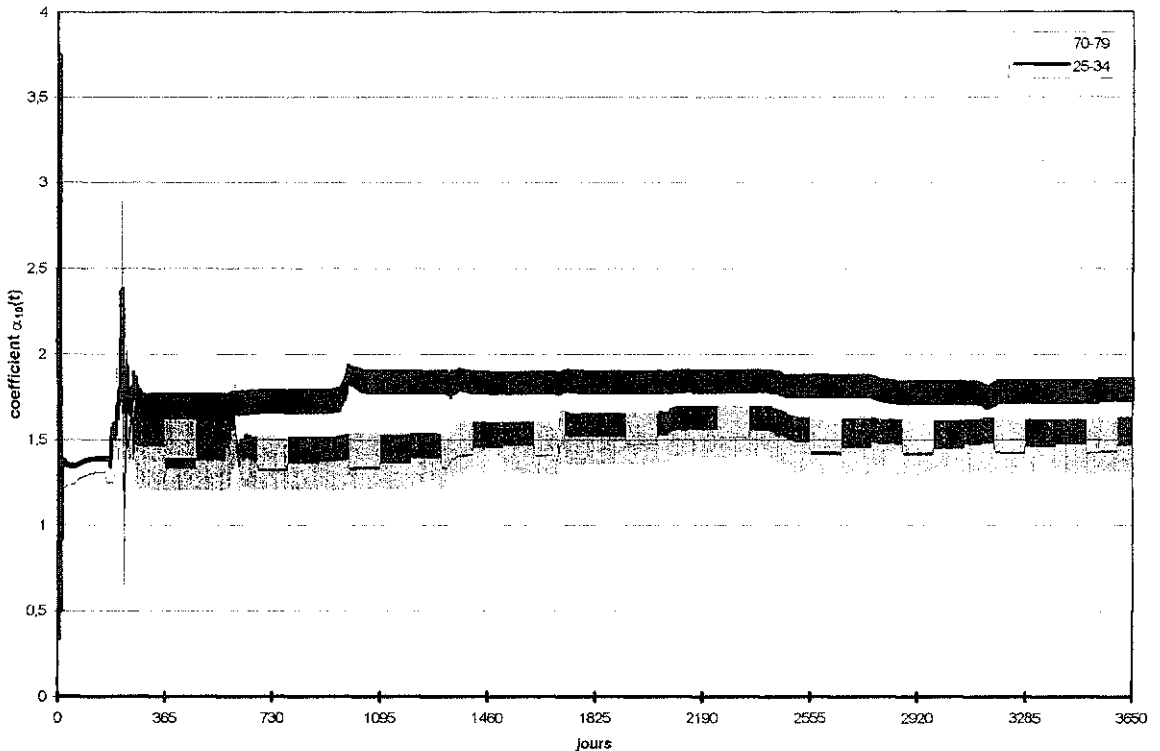


Fig. 3 Evolution journalière du coefficient $\alpha_{10}(t)$ calculé à l'aide du filtre de Kalman 1970-1979.

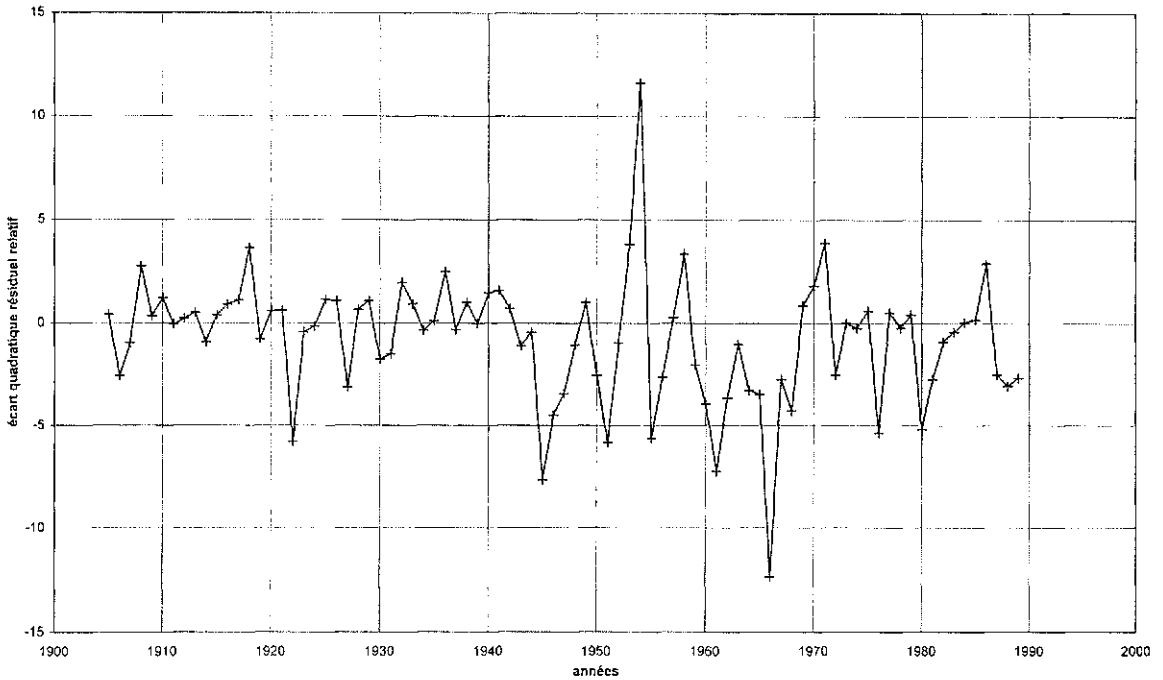


Fig. 4 Evolution interannuelle de l'écart entre les écarts quadratiques moyens des erreurs de prévision calculés avec et sans filtre de Kalman 1905-1989.

Comparaison des deux méthodes

Pour mettre en évidence l'effet du filtre de Kalman, une étude qualitative a été réalisée à partir de l'évolution interannuelle de la différence (ε) des écarts quadratiques moyens des erreurs de prévision faites avec (ε_k) et sans filtre de Kalman (ε_r) sur la Fig. 4. Cet écart a été écrit sous la forme $\varepsilon = \varepsilon_k - \varepsilon_r$. Suivant le signe de (ε) le filtre améliore ($\varepsilon < 0$) ou n'améliore pas ($\varepsilon > 0$). L'analyse de cette figure montre que c'est à partir de 1944 que le filtre de Kalman est plus efficace.

CONCLUSION

L'application du filtre de Kalman combinée avec un modèle de régression linéaire permet d'améliorer les essais de prévision des crues à partir de 1944, qui est elle-même une année de sécheresse. Avant cette période, l'utilisation des coefficients calés sur la crue précédente suffit.

Remerciements Les auteurs remercient l'ORSTOM pour le Pentium 133 complet utilisé grâce auquel les calculs ont pu être faits, qui a été acquis dans le cadre d'un contrat de chercheur associé financé par l'ORSTOM pour le premier auteur, et pour les données critiquées et homogénéisées mises à sa disposition par le Centre de Dakar-Hann.

REFERENCES

- Borne, P., Dauphin-Tanguy, G., Richard, J. P., Rottela, F. & Zambettakis, I. (1990) *Commande et optimisation des processus*. Editions Technip, Paris, France.
- Paturel, J. E., Servat, E., Koumé, B., Lubes, H., Fritsch, J. M. & Masson, J. M. (1997) Manifestation d'une variabilité hydrologique en Afrique de l'ouest. In: *Sustainability of Water Resources under Increasing Uncertainty* (ed. par D. Rosbjerg *et al.*) (Proc. Rabat Symp. S1, avril 1997), 21-41. IAHS Publ. no. 240.
- Sambou, S. & Thirriot, C. (1993) Algorithme non récursif et récursif: application à la prévision des crues du fleuve Sénégal en amont de Bakel. In: *Hydrology of Warm Humid Regions* (ed. par J. Stuart Gladwell) (Proc. Yokohama Symp., juillet 1993), 139-148. IAHS Publ. no. 216.
- Thirriot, C. (1992) Indices de coordination et algorithmes de prévision des crues. *C.R. Acad. Sci., Paris* **315**, série II, 683-688.